

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Белоцерковский, Обтекание кругового цилиндра с отошедшей ударной волной, *Докл. АН СССР*, 1957, том 113, номер 3, 509–512

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.175.28.53

12 декабря 2024 г., 19:23:54



О. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

## ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА С ОТОШЕДШЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 23 X 1956)

Задача обтекания тел с отошедшей ударной волной исследовалась лишь в весьма приближенной постановке ( $(3^{-5})$  и др.). Применение электронных счетных машин дает возможность получить окончательные результаты с нужной степенью точности для задачи в точной постановке.

1. Постановка задачи. Пусть плоско-параллельный сверхзвуковой поток ( $M_\infty > 1$ ) идеального газа набегаёт с постоянной скоростью  $w_\infty$  на круговой цилиндр. Перед цилиндром возникает ударная волна, форма и положение которой заранее неизвестны. Введем безразмерные величины, относя скорость к максимальной скорости; давление и плотность — к давлению и плотности торможения до ударной волны; линейные размеры — к радиусу цилиндра, и рассмотрим систему уравнений движения, неразрывности и энергии:

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} \times \mathbf{w} + \nabla \frac{w^2}{2} + \frac{\nabla(kp)}{\rho} = 0, \quad \nabla(\rho w) = 0, \quad \mathbf{w} \nabla \frac{p}{\rho^\kappa} = 0, \quad (1)$$

где  $w$ ,  $p$ ,  $\rho$  — скорость, давление и плотность за ударной волной;  $\kappa$  — показатель адиабаты;  $k = (\kappa - 1)/2\kappa$  (для воздуха  $\kappa = 1,40$  и  $k = 1/7$ ).

Вводя в полярных координатах  $(r, \vartheta)$  (рис. 1) вместо одного из уравнений движения интеграл Бернулли, получим систему, эквивалентную (1); вместе с уравнением для функции тока ( $\psi$ ) новая система будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial rH}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} - g = 0, \quad \frac{\partial rh}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial \vartheta} = 0, \\ \varphi = \frac{p}{\rho^\kappa} = \varphi(\psi), \quad \frac{d\psi}{d\vartheta} = \rho \left( v \frac{dr}{d\vartheta} - ru \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$H = kp + \rho u^2, \quad S = \rho uv, \quad g = kp + \rho v^2, \quad h = \tau u, \quad (3)$$

$$t = \tau v, \quad \tau = (1 - w^2)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad p = (1 - w^2) \rho, \quad \rho = \tau \varphi^{-\frac{1}{\kappa-1}},$$

$u$ ,  $v$  — составляющие скорости  $w$  вдоль  $r$  и  $\vartheta$ . В этой системе неизвестными являются функции  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ .

Граничные условия на теле ( $r = 1$ ) имеют вид:

$$u(\vartheta) = 0, \quad \psi(\vartheta) = 0, \quad \varphi(\vartheta) = \varphi(0) = \text{const}. \quad (4)$$

На ударной волне, где  $r(\vartheta) = 1 + \varepsilon(\vartheta)$ , известные соотношения для тангенциальной и нормальной составляющих скорости, давления, плотности и функции тока вместе с очевидным геометрическим соотношением вдоль волны могут быть записаны в форме

$$u(\vartheta) = F_2 \sin \vartheta - F_1 \cos \vartheta, \quad v(\vartheta) = F_1 \sin \vartheta + F_2 \cos \vartheta,$$

$$p(\vartheta) = \frac{4\kappa}{\kappa^2 - 1} (1 - w_\infty^2)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left[ \frac{w_\infty^2 \cos^2 \chi}{1 - w_\infty^2} - \frac{(\kappa - 1)^2}{4\kappa} \right], \quad (5)$$

$$\varphi(\vartheta) = \frac{4\kappa}{\kappa^2 - 1} \left[ \frac{(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)} \frac{1 - \omega_\infty^2 \sin^2 \chi}{\omega_\infty^2 \cos^2 \chi} \right]^\kappa \left[ \frac{\omega_\infty^2 \cos^2 \chi}{1 - \omega_\infty^2} - \frac{(\kappa - 1)^2}{4\kappa} \right],$$

$$\psi(\vartheta) = \omega_\infty (1 - \omega_\infty^2)^{\kappa-1} (1 + \varepsilon) \sin \vartheta, \quad \frac{d\varepsilon(\vartheta)}{d\vartheta} = (1 + \varepsilon) \operatorname{tg}(\vartheta - \chi),$$

где  $\varepsilon(\vartheta)$  — расстояние от поверхности тела до волны вдоль луча  $\vartheta = \text{const}$ ;  $\chi$  — угол между касательной к волне и вертикалью (рис. 1);  $\psi(0) = 0$ ;

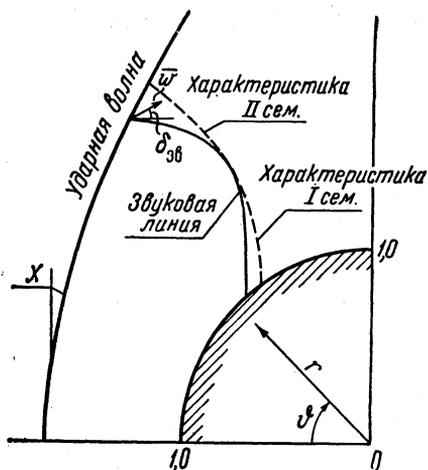


Рис. 1

$F_1$  и  $F_2$  — известные функции  $\chi$ ,  $M_\infty$ .

2. Метод решения. Для решения поставленной задачи был применен метод интегральных соотношений (1), состоящий в следующем. Проведем между волной и телом  $N - 1$  равноотстоящих вдоль  $r$  линий  $\xi = \xi_i = \text{const}$  ( $\xi = (r - 1)/\varepsilon(\vartheta)$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ ), которые разобьют область интегрирования на  $N$  полос. Обозначим все величины на теле, где  $\xi = \xi_0 = 0$ , индексом 0, на  $i$ -й линии, где  $\xi = \xi_i = [N - (i - 1)]/N$ , — индексом  $i$  и на волне ( $\xi = \xi_1 = 1$ ) — индексом 1. Проинтегрируем два первых уравнения из системы (2) вдоль произвольного луча  $\vartheta = \text{const}$  от поверхности тела до границы каждой из полос, тогда получим  $2N$  независимых интегральных соотношений:

$$r_i H_i - H_0 + \frac{d}{d\vartheta} \int_1^{1+\xi_i \varepsilon(\vartheta)} S(r, \vartheta) dr - S_i \xi_i \frac{d\varepsilon(\vartheta)}{d\vartheta} - \int_1^{1+\xi_i \varepsilon(\vartheta)} g(r, \vartheta) dr = 0; \quad (6)$$

$$r_i h_i - h_0 + \frac{d}{d\vartheta} \int_1^{1+\xi_i \varepsilon(\vartheta)} t(r, \vartheta) dr - t_i \xi_i \frac{d\varepsilon(\vartheta)}{d\vartheta} = 0; \quad (7)$$

$$= 1, 2, \dots, N; \quad r_i(\vartheta) = 1 + \xi_i \varepsilon(\vartheta); \quad H_i = H(r_i, \vartheta); \quad H_0 = H(1, \vartheta); \quad S_i = S(r_i, \vartheta);$$

$$h_i = h(r_i, \vartheta); \quad h_0 = h(1, \vartheta); \quad t_i = t(r_i, \vartheta).$$

Аппроксимируем теперь любую подинтегральную функцию  $f(r, \vartheta)$  интерполяционными многочленами степени  $N$  по  $r$ , принимая за узлы интерполяции границы полос

$$f(r, \vartheta) = \sum_{m=0}^N a_m(\vartheta) \left[ \frac{r-1}{\varepsilon(\vartheta)} \right]^m, \quad (8)$$

причем  $a_m(\vartheta)$  будет линейно зависеть от значений соответствующей функции на границах полос.

Подставим (8) в интегральные соотношения (6), (7) и проведем интегрирование. Записав далее два последних уравнения системы (2) вдоль каждой из  $N - 1$  линий  $\xi = \xi_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, N$  (на волне и на теле  $\varphi$  и  $\psi$  находятся из граничных условий) и учитывая последнее уравнение из (5), получим аппроксимирующую систему, состоящую из  $4N - 1$  уравнений для неизвестных  $v_0, u_j, v_j, \varphi_j, \psi_j, \varepsilon, \chi$ . Таким образом, получается задача для системы  $3N$  обыкновенных дифференциальных уравнений и  $N - 1$  конечных соотношений.

Из условия симметрии получаем следующие граничные условия: при  $\vartheta = 0$   $v(r, 0) = \psi(r, 0) = \chi(0) = 0$ . Однако полученная система в окрест-

ности звуковой линии будет иметь особые точки. Требование непрерывности движения в этих точках и дает нам недостающие условия для определенности задачи. Эти условия подобны тем, которые были получены С. А. Христиановичем <sup>(2)</sup> из точной системы дифференциальных уравнений в частных производных для некоторых случаев безвихревых потоков. Построенное таким путем решение будет удовлетворять всем условиям данной задачи, в том числе граничным условиям на теле и на волне.

Решение аппроксимирующей системы проводилось численно при разном числе промежуточных линий: в I приближении ( $N = 1$ ) не проводилось ни одной промежуточной линии, и  $S, g, t$  аппроксимировались линейно по их значениям на теле и на волне. 3 неизвестных функции  $v_0, \varepsilon, \chi$  находились из 3 дифференциальных уравнений. Во II приближении ( $N = 2$ ) вводилась одна промежуточная линия; в III ( $N = 3$ ) — две и т. д. Совпадение результатов с требуемой точностью в двух последних приближениях свидетельствует о практической сходимости расчета (рис. 3).

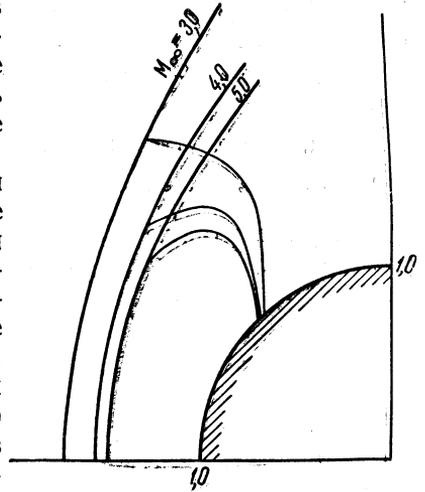


Рис. 2

Технику расчета поясним на примере II приближения. Аппроксимации имеют вид:

$$f(r, \vartheta) = f_0 + [4f_2 - f_1 - 3f_0] \frac{r-1}{\varepsilon(\vartheta)} + 2[-2f_2 + f_1 + f_0] \left[ \frac{r-1}{\varepsilon(\vartheta)} \right]^2,$$

где  $f_1, f_2, f_0$  — значения  $f(r, \vartheta)$ , соответственно, на волне, на средней линии и на теле. Аппроксимирующая система такова:

$$\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = (1 + \varepsilon) \operatorname{tg}(\vartheta - \chi), \quad \frac{d\chi}{d\vartheta} = \Phi^{(2)}, \quad \frac{dv_0}{d\vartheta} = \frac{E_0^{(2)}}{1/6 - v_0^2},$$

$$\frac{du_2}{d\vartheta} = \frac{1}{\tau_2 v_2 \varphi_2} \left( F_3 - F_4 u_2 \varphi_2^{-\frac{1}{\kappa-1}} + \frac{5}{2} F_5 \frac{d\varphi_2}{d\vartheta} \right),$$

$$\frac{dv_2}{d\vartheta} = \frac{E_2^{(2)}}{1 + 5u_2^2 - \omega_2^2}, \quad \frac{d\varphi_2}{d\vartheta} = \frac{\rho_2}{2} \left[ v_2 \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} - (2 + \varepsilon) u_2 \right], \quad \varphi_2 = \varphi_1(\psi_1) |_{\psi_1 = \varphi_2},$$

где  $\Phi^{(2)}, E_0^{(2)}, E_2^{(2)}, F_3, F_4, F_5$  — известные функции  $\vartheta, u_i, v_i, \varphi_i, \varphi_i; i = 0, 1, 2; \kappa = 1, 40$ .

Интегрирование системы ведется от  $\vartheta = 0$ , где  $v_0 = v_2 = \chi = \psi_2 = 0$ , а  $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$  и  $u_2(0)$  — два неизвестных параметра. В точках, где  $v_0^2 = 1/6$  и  $\omega_2^2 = (1 + 5u_2^2)/6$ , производные  $dv_0/d\vartheta$  и  $dv_2/d\vartheta$  становятся бесконечными, и из условия непрерывности движения в этих точках должно быть  $E_0^{(2)} = 0$  и  $E_2^{(2)} = 0$ . В каждом следующем приближении добавляются один параметр  $u_i(0)$  и одно условие: при  $\omega_i^2 = (1 + 5u_i^2)/6$   $E_i = 0$ . Таким образом, точки, где линия  $\omega_i^2 - (1 + 5u_i^2)/6 = 0$  пересекает границы полос или поверхность тела, будут особыми точками нашей системы (особенности типа «седла»).

В заключение найдем на волне угол  $\delta_k$  между линией тока ( $\psi = \text{const}$ ) и линией  $\omega = \omega_k = \text{const}$ . Записав в прямоугольных координатах уравнения неразрывности, вихря и два выражения полных производных вдоль,

волны от составляющих скорости, получим систему уравнений для определения 4 частных производных от этих составляющих. Затем из условия  $dw = 0$  определим искомый угол  $\delta_k$ , который в плоском течении для данного  $\omega_k$  зависит, оказывается, только от  $M_\infty$  — таким образом, форма тела на этот угол не влияет (в осесимметричном случае угол  $\delta_k$  зависит еще и от кривизны волны). Для звуковой линии ( $\omega_k = 1/\sqrt{6}$ ) изменение угла  $\delta_{зв}$  по  $M_\infty$  дано в табл. 1.

Таблица 1

$M_\infty$	1,00	1,125	1,25	1,50	1,69	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00
$\delta_{зв}^\circ$	90,000	96,332	96,894	95,915	90,000	73,606	46,174	30,697	18,914	14,804	12,888	11,838	11,189

Получено также выражение для  $\delta_k$  на теле и в поле, но здесь этот угол определяется через  $\omega$ ,  $d\omega/ds$  ( $s$  — длина дуги вдоль  $\psi = \text{const}$ ),

радиус кривизны линии тока и значение вихря в рассматриваемой точке.

3. Результаты расчетов. На электронной машине БЭСМ были произведены расчеты обтекания кругового цилиндра при разных  $M_\infty$  по I, II и частично по III приближениям.

На рис. 1 для случая  $M_\infty = 3,0$  по III приближению построены ударная волна, звуковая линия ( $M = 1$ ) и характеристики. Картина обтекания, полученная по II приближению, очень близка к построенной.

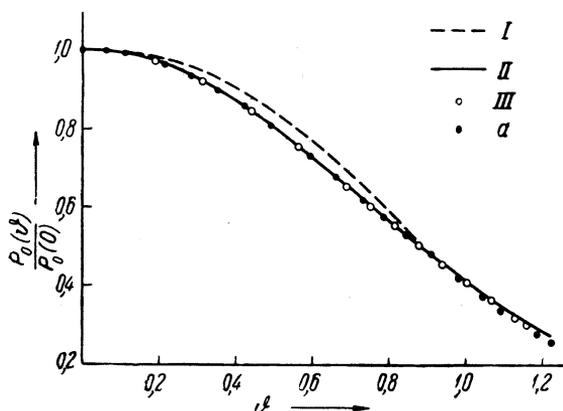


Рис. 3. I — первое приближение; II — второе приближение; III — третье приближение, а — эксперимент

На рис. 2 построены волны и звуковые линии для случаев  $M_\infty = 3,0$  (III приближение), 4,0 и 5,0 (II приближение). Угол наклона звуковой линии в точке пересечения ее с волной хорошо согласуется с данными табл. 1.

Рис. 3 иллюстрирует сходимость метода по приближениям при  $M_\infty = 3,0$ ; здесь же дано сравнение с результатами эксперимента, проведенного Г. М. Рябинковым (через  $p_0(\psi)/p_0(0)$  обозначено отношение давления на теле к давлению в критической точке).

Анализ расчетов показывает, что уже II приближение дает достаточно точные результаты. Данные расчетов дают возможность построить картину давления на поверхности и вне тела, звуковую линию, характеристики, положение и форму ударной волны и т. д. Аналогичным путем решается задача обтекания с отошедшей ударной волной плоских или пространственных тел произвольной формы, обладающих осью симметрии.

Вычислительный центр  
Академии наук СССР

Поступило  
20 X 1956

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. А. Дородницын, Тр. 3-го Всесоюзн. матем. съезда, 2, 1956. <sup>2</sup> С. А. Христианович, Тр. ЦАГИ, в. 543, 1941. <sup>3</sup> Г. С. Смуров, Тр. Военно-возд. инж. акад. им. Н. Е. Жуковского, № 191 (1947). <sup>4</sup> D. Holder, A. Chinneck, The Aeronautical Quarterly, 4, Pt. 4 (1954). <sup>5</sup> Н. Массол, J. Codd, Aeronaut. Res. Com., № 9315 (1945).